

共分散情報による線形定常 Fixed-Point スムーザの設計[†]

中 森 誠 一*・幡 司 明*

Design of Linear Stationary Fixed-Point Smoother by Covariance
Information Based on the Innovations Theory

Seiichi NAKAMORI* and Akira HATAJI*

This paper designs the new fixed-point smoother, which estimates a stationary stochastic signal, based on the innovations theory by the covariance information of the signal and observation noise processes. Two kinds of observation noises are considered here, which are the stationary white noise and the stationary white plus stationary coloured noise. We design the sub-optimal fixed-point smoother for each noise. The new smoother has the two advantages: 1) The linear stationary stochastic signal can be estimated, with a simple initial-value system, directly by the curve-fitted functions of the covariance information, and by the observed values. So we do not have any trouble of finding an approximating state space model by the spectral factorization method, using covariance information. 2) The calculation of the algorithm for the fixed-point smoothing estimate is easy. The reason is that the covariance function of the stationary stochastic signal and coloured-noise processes are assumed to be semi-degenerate. Semi-degenerate kernels can express the general kind of covariance information in the form of finite sums of products of nonrandom functions.

The originality of this paper lies in the idea that we first derived the fixed-point smoother, which estimates a linear stationary stochastic signal, based on the innovations theory by the covariance information. In comparison with the fixed-point smoother for the stationary white noise case by the Wiener-Hopf integral equation approach using the information in

nonstationary systems, the present fixed-point smoother in this paper for stationary systems also has the numerical merit that the given algorithms contain fewer number of differential equations than those by the Wiener-Hopf integral equation approach.

The effectiveness of the new fixed-point smoother was assured by some numerical examples.

1. はじめに

共分散情報を用いた統計的確率推定理論における推定器の設計方法に関して、今まで幾多の研究が行われている^{1)~7)}。Fig. 1 に図示されるように、共分散情報は spectral factorization 法¹⁾により状態空間モデルの情報に変換される。ゆえに、共分散情報が与えられたときの推定問題は、状態空間モデル情報を用いる Kalman フィルタ²⁾などにより解決される。しかしながら、共分散情報による推定問題の解法は、spectral factorization 法による状態空間モデルの解析的算出という間接的方法よりも共分散情報を直接用いる手法のほうがわかりやすく簡単であると考えられる。共分散情報を直接用いる推定問題として、Wiener-Hopf 積分方程式を満足する最適インパルス応答関数を解析的に計算し、最小2乗推定値を求める方法³⁾が研究されているが、解析的手法は複雑な形を有する共分散関数が与えられた際に、容易に最適インパルス応答関数を計算できないという欠点をもつ。先に、中森らは、Wiener-Hopf 積分方程式から出発して、信号の共分散情報として一般的な Gauss Markov 過程の共分散関数を表示できる semi-degenerate 核^{4)~7)}を用いて、線形非定常システムにおける最小2乗フィルタ⁴⁾、予測⁵⁾、スムージング^{6), 7)}推定値を求める初期値システムを提案した (Fig. 1 一点鎖線部分)。

† Dynamical System Theory シンポジウムで発表 (昭 54・12)

* 大分大学工学部 大分市旦野原 700

* Faculty of Engineering, Oita University, Oita

(Received September 3, 1979)

(Revised May 6, 1980)

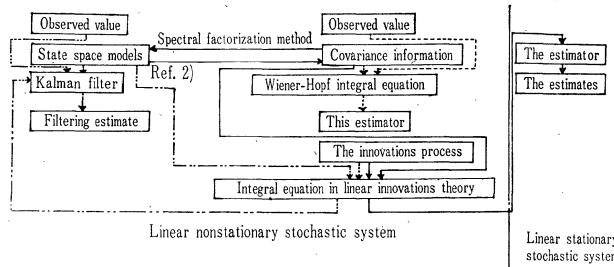


Fig. 1 The relationship between this study and the related studies

本論文では、推定理論においてよく知られるイノベーション理論⁸⁾と共分散情報を融合させた新しい独創的な線形定常確率信号過程の推定を行える推定器を提案している。従来よりイノベーション理論は、推定問題において重要な役割を果している。たとえば、T. Kailath⁸⁾は、イノベーション理論において得られる最小2乗推定問題における線形非定常システムの積分方程式から連続時間 Kalman フィルタの導出を行い、離散時間システムにおいてもイノベーション理論により離散時間 Kalman フィルタを得ている (Fig. 1 二点鎖線部分)。本論文は、イノベーション理論における最小2乗推定問題の最適インパルス応答関数の満足する積分方程式に着目し、定常有色+定常白色観測雑音のときの準最適なインパルス応答関数の満足する Fredholm 第2種積分方程式を導出する。この線形積分方程式は筆者らが初めて提案するもので、イノベーション推定理論および共分散情報を用いた通信信号理論を、大幅に進歩させる基礎的な積分方程式に値するといつても過言ではない。定理1では、線形定常確率信号推定問題において得られた線形積分方程式に Invariant Imbedding の手法を適用して、fixed-point スムージング推定値を求める初期値システムを定常有色+定常白色観測雑音の場合に与えている。定理2は、定理1の結果を参考にして定常白色観測雑音のときの共分散情報を用いた定常確率信号の fixed-point スムージング推定値を求める初期値システムを導出する (Fig. 1 実線部分参照)

得られたスムーザの長所を箇条書きで以下に述べる。1. 定常確率信号と定常有色雑音の共分散関数を、一般的な線形定常確率過程の共分散関数を表示できる semi-degenerate 核で表わすので、一般的な定常確率信号の推定が行える。2. 推定アルゴリズムは微分方程式のみによる初期値システムで与えられるので、簡単な数値計算により推定値が求められる。3. 共分散情報は入手しやすく、本稿の推定器は応用面が広い。

さらに、文献4~7の Wiener-Hopf 積分方程式アプローチによる共分散情報を用いた推定器に比較して、本稿の推定器は以下の長所と短所をもつと考えられる。1. 本論文による fixed-point スムーザ (定常白色雑音) は、文献6のスムーザ (定常白色雑音) に比較して初期値システムを構成する微分方程式の数が少ないため、計算時間が短く効率の良いアルゴリズムである。2. 本論文の推定器は、定常確率信号の推定が行えるのに対して、文献4~7の推定器は非定常確率信号まで含めた信号推定を行うこと

ができるという、対象とするシステムの範囲の狭さに本稿の fixed-point スムーザアルゴリズムは欠点をもつ。しかしながら、2.の欠点は、実際的にはほとんど意味をもたない。何故なら、われわれの周囲に存在する物理的意味を有する時系列データは、大部分が定常確率過程の範疇に属し、本イノベーション理論による推定器は普遍的データ推定に適用が可能である。また、1.の数値計算面での長所が、実際のデータ推定の際に有効に響いてくる。すなわち、共分散情報をフーリエ \cos , \sin 近似などにより関数表示した際、フーリエ近似項数の増大化に伴い、本稿および Wiener-Hopf 積分方程式アプローチによる推定アルゴリズム中の微分方程式の数が増加するので、実際データ処理を行うときにはなるべく計算時間の短いアルゴリズムが要求され、1.の長所は本稿の推定器の実用的応用価値の高さを示している。

導出された fixed-point スムージング推定値を求めるアルゴリズムの正当性を確めるために、定常確率の信号 (定常1次の Butterworth 過程⁴⁾) に定常有色雑音 (定常1次の Butterworth 過程) と定常白色雑音の付加した観測値から推定値を求める問題について計算機シミュレーションを行った。その結果、本論文の fixed-point スムーザを用いると容易に推定値が得られることが判明した。また定常白色観測雑音の場合に、信号を定常1次の Butterworth 過程として、Wiener-Hopf 積分方程式アプローチと本稿のイノベーションアプローチによる fixed-point スムージング推定値の比較を行い、数値計算結果に関する検討の末、本稿のスムーザは、より真値への収束が早いという優れた整定特性をもつことが確かめられた。

2. イノベーション理論と最小2乗推定問題

2.1 定常有色+定常白色観測雑音

つきの確率過程を考えよう。

$$y(t) = z(t) + v(t) + v_c(t), \quad 0 \leq t \leq \infty \quad (1)$$

ここで、

$\mathbf{y}(t)$: n ベクトルの観測値

$\mathbf{z}(t)$: 互いに無相関な n ベクトル非定常確率信号

$\mathbf{v}(t)$: n ベクトルの定常白色観測雑音

$\mathbf{v}_c(t)$: n ベクトルの定常有色観測雑音 (定常白色を除く)

とする。 $\mathbf{z}(t)$, $\mathbf{v}(t)$, および $\mathbf{v}_c(t)$ は、それぞれ平均値ゼロとし、 $\mathbf{v}(t)$ の共分散関数は

$$E[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(s)] = R\delta(t-s), \quad 0 \leq t, s \leq \infty \quad (2)$$

で与えられる。ここに、 R は $n \times n$ の正值行列であり、その逆行列が存在する。また、 $\mathbf{v}(t)$ は定常白色雑音と仮定するので、 R は時間的に不変な行列である。信号 $\mathbf{z}(t)$ 、観測雑音 $\mathbf{v}_c(t)$ 、および $\mathbf{v}_c(t)$ はお互いに無相関とし

$$E[\mathbf{z}(t)\mathbf{v}^T(s)] = 0$$

$$E[\mathbf{z}(t)\mathbf{v}_c^T(s)] = 0$$

$$E[\mathbf{v}_c(t)\mathbf{v}_c^T(s)] = 0, \quad 0 \leq t, s \leq \infty \quad (3)$$

の関係式が成立する。また、信号と有色雑音過程の平均値はゼロと仮定するので、信号と有色雑音の自己共分散関数 $K(t, s)$, $K_c(t, s)$ は自己相関関数に等しくなり、それぞれ semi-degenerate 核^{4)~7)}を使用して(4)式、(5)式で与えられると仮定する。

$$K(t, s) = E[\mathbf{z}(t)\mathbf{z}^T(s)]$$

$$= \begin{cases} \sum_{i=1}^M \alpha_i(t)\beta_i(s), & 0 \leq s \leq t \\ \sum_{i=1}^M \beta_i(t)\alpha_i(s), & 0 \leq t \leq s \end{cases} \quad (4)$$

$$K_c(t, s) = E[\mathbf{v}_c(t)\mathbf{v}_c^T(s)]$$

$$= \begin{cases} \sum_{j=1}^M \gamma_j(t)\delta_j(s), & 0 \leq s \leq t \\ \sum_{j=1}^M \delta_j(s)\gamma_j(t), & 0 \leq t \leq s \end{cases} \quad (5)$$

(4), (5)式において、 n 個の多重チャネルの信号成分がお互いに無相関であり、有色雑音の成分どうしも無相関のときに、semi-degenerate 核の成分 α_i , β_i , γ_j , δ_j は、(6), (7)式により定義される^{5), 7)}。

$$\alpha_i(t) = \begin{pmatrix} \alpha_{1i}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{2i}(t) & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{ni}(t) \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\beta_i(t) = \begin{pmatrix} \beta_{1i}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_{2i}(t) & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{ni}(t) \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\gamma_j(t) = \begin{pmatrix} \gamma_{1j}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_{2j}(t) & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma_{nj}(t) \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\delta_j(t) = \begin{pmatrix} \delta_{j1}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_{j2}(t) & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \delta_{jn}(t) \end{pmatrix}$$

t を fixed-point とするときの fixed-point スムージング推定値は、イノベーション理論^{8), 9)}の結果より、つきの過程

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{z}}(t, t) \quad (8)$$

の線形汎関数として(9)式で与えられる。ここに $\hat{\mathbf{z}}(t, t)$ はフィルタ推定値を表わす。一般に $\hat{\mathbf{z}}(t, t)$ は \mathbf{y} の線形変換として与えられるので⁸⁾、(8)式より \mathbf{v} は \mathbf{y} から可逆な線形演算子により求められる。よって(9)式で推定値を与えるのは妥当である。

$$\hat{\mathbf{z}}(t, T) = \int_0^T \mathbf{g}(t, s, T) \mathbf{v}(s) ds, \quad 0 \leq s \leq T \quad (9)$$

(9)式を使用して、(10)式の fixed-point スムージング推定問題における推定誤差分散

$$Q = E\|\mathbf{z}(t) - \hat{\mathbf{z}}(t, T)\|^2 \quad (10)$$

を最小にする最適インパルス応答関数 $\mathbf{g}(t, s, T)$ は、直交射影の定理^{2), 8)}から(11)式の積分方程式を満足する。

$$E[\mathbf{z}(t)\mathbf{v}^T(s)]$$

$$= \int_0^T \mathbf{g}(t, \tau, T) E[\mathbf{v}(\tau)\mathbf{v}^T(s)] d\tau, \quad 0 \leq s \leq T \quad (11)$$

(11)式右辺の $E[\mathbf{v}(\tau)\mathbf{v}^T(s)]$ の量は、(1), (2), (3), (5)式と(9)式より

$$E[\mathbf{v}(\tau)\mathbf{v}^T(s)] = R\delta(\tau-s) + K_c(\tau, s) - E[\mathbf{v}_c(\tau)\hat{\mathbf{z}}^T(s, s)], \quad 0 \leq \tau, s < \infty \quad (12)$$

のように求められる。(12)式の証明は付録に示す。

(11)式の右辺は、(3), (4)式より

$$\begin{aligned} E[\mathbf{z}(t)\mathbf{v}^T(s)] &= E[\mathbf{z}(t)(\mathbf{y}(s) - \hat{\mathbf{z}}(s, s))^T] \\ &= E[\mathbf{z}(t)(\mathbf{z}(s) + \mathbf{v}(s) + \mathbf{v}_c(s) - \hat{\mathbf{z}}(s, s))^T] \\ &= E[\mathbf{z}(t)\mathbf{z}^T(s)] - E[\mathbf{z}(t)\hat{\mathbf{z}}^T(s, s)] \\ &= K(t, s) - E[\mathbf{z}(t)\hat{\mathbf{z}}^T(s, s)] \end{aligned} \quad (13)$$

(12), (13)式を(11)式に代入して

$$\begin{aligned} K(t, s) &= \mathbf{g}(t, s, T) R + \int_0^T \mathbf{g}(t, \tau, T) K_c(\tau, s) d\tau \\ &\quad - \int_0^T \mathbf{g}(t, \tau, T) E[\mathbf{v}_c(\tau)\hat{\mathbf{z}}^T(s, s)] d\tau \\ &\quad + E[\mathbf{z}(t)\hat{\mathbf{z}}^T(s, s)] \end{aligned} \quad (14)$$

を得る。(14)式を直接解いていくと非定常確率信号の推定を行える最適な $\mathbf{g}(t, s, T)$ が求められる。しかしながら(14)式を用いて、 $\mathbf{g}(t, s, T)$ を求めるアルゴリ

ズムを導出することは難解である。定常確率信号過程の推定問題を考えるとき、(14)式の非定常項をゼロとすることにより、簡略化された積分方程式を得る。弱定常確率信号過程の共分散関数は（信号の平均値はゼロとするので、信号は広義の定常確率過程となる）、

$$K(t, s) = K(t-s, 0) \\ = K(t-s) \quad (15)$$

の関係を有することが知られている²⁾。(14)式の右辺3, 4項は、明らかに非定常項を表わし、それ故、 $t \rightarrow t-s=\gamma, s=0$ とおくと

$$E[\mathbf{v}_c(\gamma) \hat{\mathbf{z}}^T(0, 0)] = 0 \\ E[\mathbf{z}(\gamma) \hat{\mathbf{z}}^T(0, 0)] = 0 \quad (16)$$

となる。ここに、(9)式で $T=t=0$ において $\hat{\mathbf{z}}(0, 0) = 0$ の関係を使用した。(16)式より、特に定常確率信号過程の推定問題について、(14)式を近似的に次式で表わす。

$$g(t, s, T) R \\ = K(t, s) - \int_0^T g(t, \tau, T) K_c(\tau, s) d\tau \quad (17)$$

(17)式の解 $g(t, s, T)$ は準最適なインパルス応答関数となることは、つぎの説明より明らかである。(14)式は、非定常・定常確率信号推定問題に適用でき、それぞれ最適な $g(t, s, T)$ の満足する積分方程式となってい。る。(14)式の簡略化された(17)式は、準最適なインパルス応答関数の満足する Fredholm 第 2 種積分方程式である。fixed-point スムージング問題における(14), (17)式は、本論文で初めて提案する。

2.2 定常白色観測雑音

つぎの観測方程式を考えよう。

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{z}(t) + \mathbf{v}(t), \quad 0 \leq t \leq \infty \quad (18)$$

ここに、 $\mathbf{y}(t)$ は n ベクトルの観測値とし、 $\mathbf{z}(t), \mathbf{v}(t)$ は、それぞれ平均値ゼロの非定常確率信号と定常白色観測雑音を表わし、それらの自己共分散関数は、(4)式と(2)式で与えられる仮定する。

線形非定常確率信号推定問題において定常白色観測雑音の場合の最適インパルス応答関数の満足する非線形積分方程式は、(12)式において有色雑音の関係する項をゼロとおいて得られる式と、(9), (11), (13)式を用いて、次式で与えられる。

$$g(t, s, T) R \\ = K(t, s) - \int_0^s g(t, \tau, T) R g^T(s, \tau, s) d\tau \quad (19)$$

定常白色観測雑音の場合、定常確率信号過程の推定を行う準最適なインパルス応答関数は、(17)式で $K_c(\tau, s) = 0, 0 \leq \tau, s \leq T$ とおくと、

$$g(t, s) = K(t, s) R^{-1} \quad (20)$$

という簡単な式により与えられる。(20)式において、関数 g が t と s のみの関数で、変数 T を含まないとしたのは、右辺の $K(t, s)$ が変数 t と s の関数であることに起因する。

3. fixed-point スムーザの誘導

3.1 定常有色+定常白色観測雑音

本節では、(17)式の Fredholm 第 2 種積分方程式に Invariant Imbedding の手法¹⁰⁾を適用して、定常有色+定常白色観測雑音の場合に、線形定常確率信号過程の fixed-point スムージング推定値を求める初期値システムを定理 1 で導出する。

《定理 1》

定常有色+定常白色観測雑音のときに、定常確率信号の準最適な fixed-point スムージング推定値は、信号と観測雑音の共分散情報を用いて、(21)式～(32)式の初期値システムにより求められる。ここに、定常確率信号と定常有色雑音の自己共分散関数は、semi-degenerate 核を用いて、それぞれ(4)式と(5)式で与えられるものとする。

$$\partial/\partial T \hat{\mathbf{z}}(t, T) = g(t, T, T) (\mathbf{y}(T) - \hat{\mathbf{z}}(T, T))$$

$$- g(t, T, T) \sum_{j=1}^N \gamma_j(T) A_j(T) \quad (21)$$

(fixed-point スムージング推定値)

$$\hat{\mathbf{z}}(T, T) = \sum_{i=1}^M \alpha_i(T) O_i(T) \quad (22)$$

(フィルタ推定値)

$$g(t, T, T) = \left(\sum_{i=1}^M \beta_i(t) \alpha_i(T) \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^N M_j(t, T) \gamma_j(T) \right) R^{-1} \quad (23)$$

$$\partial/\partial T M_j(t, T)$$

$$= g(t, T, T) \left(\delta_j(T) - \sum_{i=1}^N \gamma_i(T) R_{ij}(T) \right) \quad (24)$$

$$M_j(T, T) = \sum_{i=1}^M \alpha_i(T) \gamma_{ij}(T) \quad (25)$$

$$d/dT O_i(T) = L_i(T, T) (\mathbf{y}(T) - \hat{\mathbf{z}}(T, T))$$

$$- L_i(T, T) \sum_{j=1}^N \gamma_j(T) A_j(T) \quad (26)$$

$$d/dT A_j(T) = J_j(T, T) (\mathbf{y}(T) - \hat{\mathbf{z}}(T, T))$$

$$- J_j(T, T) \sum_{i=1}^N \gamma_i(T) A_i(T) \quad (27)$$

$$d/dT \gamma_{ij}(T)$$

$$= L_i(T, T) \left(\delta_j(T) - \sum_{k=1}^N \gamma_k(T) R_{kj}(T) \right) \quad (28)$$

$$d/dT R_{kj}(T)$$

$$= J_k(T, T) \left(\delta_i(T) - \sum_{j=1}^N \gamma_j(T) R_{ji}(T) \right) \quad (29)$$

$$L_i(T, T) = \left(\beta_i(T) - \sum_{j=1}^N r_{ij}(T) \gamma_j(T) \right) R^{-1} \quad (30)$$

$$J_j(T, T) = \left(\delta_j(T) - \sum_{i=1}^N R_{ji}(T) \gamma_i(T) \right) R^{-1} \quad (31)$$

初期条件は、

$$\begin{aligned} O_i(0) &= 0, \quad A_j(0) = 0, \quad r_{ij}(0) = 0, \quad R_{ki}(0) = 0, \\ i &= 1, 2, \dots, M, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (32)$$

で与えられる。

(証明)

文献 4~7 における積分方程式を初期値システムへ変換する Invariant Imbedding の手法により (21) 式~(32) 式は得られる。詳しい式の展開は紙面の都合で省略する。
(Q. E. D.)

3.2 定常白色観測雑音

3.1 節では、定常有色+定常白色観測雑音のときに、定常確率信号過程の fixed-point スムージング推定値を求める初期値システムを導出した。定理では、前節の結果を参考にして、定常白色観測雑音 (18) 式の場合に、fixed-point スムーザアルゴリズムを提案する。

《定理 2》

定常白色観測雑音のときに、定常確率信号の準最適な fixed-point スムージング推定値を求める初期値システムは、共分散情報を使用して、(33) 式~(36) 式で構成される。

$$\begin{aligned} \partial/\partial T \hat{z}(t, T) &= \sum_{i=1}^M \beta_i(t) \alpha_i(T) (\mathbf{y}(T) - \hat{z}(T, T)), \\ &\quad (\text{Fixed-point スムージング推定値}) \end{aligned} \quad (33)$$

$$\hat{z}(T, T) = \sum_{i=1}^M \alpha_i(T) O_i(T), \quad (\text{フィルタ推定値}) \quad (34)$$

$$d/dT O_i(T) = \beta_i(T) R^{-1} (\mathbf{y}(T) - \hat{z}(T, T)) \quad (35)$$

初期条件は、

$$O_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (36)$$

で与えられる。ここに、信号の共分散関数は、(4) 式の semi-degenerate 核で与えられるものとする。

(証明)

定理 1 で、定常有色雑音の共分散関数における semi-degenerate 核の成分を $\gamma_j(t) = \delta_j(t) = 0, j = 1, 2, \dots, N$ 、とおくと、(33) 式~(36) 式が即座に得られる。
(Q. E. D.)

4. 例 題

4.1 定常有色+定常白色観測雑音

定理 1 で定常有色+定常白色雑音の場合に導出された fixed-point スムージング推定値を求める初期値システムの有効性を確かめるために、計算機シミュレーションによる計算結果を述べる。

観測方程式は、(1) 式で与えられており、信号 $z(t)$ は (37) 式の状態方程式で生成される定常 1 次の Butterworth 過程⁴⁾ とする。

$$d/dt z(t) = -k z(t) + u(t) \quad (37)$$

ここに、 $u(t)$ と $z(t)$ の $t=0$ における初期値 $z(0)$ は平均値ゼロで、 $u(t)$ と $z(0)$ は、それぞれ (38), (39) 式で与えられる Gauss 性の統計的性質を有する。

$$E[u(t) u(\tau)] = 2k p \delta(t-\tau) \quad (38)$$

$$E[z^2(0)] = p \quad (39)$$

定常 1 次の Butterworth 過程の自己共分散関数は、(40) 式で定義される。

$$K(t, \tau) = \begin{cases} p e^{-k(t-\tau)}, & 0 \leq \tau \leq t \\ p e^{k(t-\tau)}, & 0 \leq t \leq \tau \end{cases} \quad (40)$$

本シミュレーションに使用される k と p の値は、 $k = 5.0, p = 10.0$ の一定値とし、 $z(0)$ は任意に -2.0 が (73) 式より選ばれる。また、定常有色観測雑音は、同様に定常 1 次の Butterworth 過程とし、(40) 式~(43) 式より与えられる。 $u_1(t)$ と $v_e(0)$ の平均値はゼロで、 $u_1(t)$ と $v_e(0)$ は、それぞれ (42) 式と (43) 式で与えられる Gauss 性の統計的性質を有する。

$$d/dt v_e(t) = -k_1 v_e(t) + u_1(t) \quad (41)$$

$$E[u_1(t) u_1(\tau)] = 2k_1 p_1 \delta(t-\tau) \quad (42)$$

$$E[v_e^2(0)] = p_1 \quad (43)$$

ここで、 $k_1 = 5.0$ の一定値に対して、 $p_1 = 0.01, p_1 = 0.1, p_1 = 0.2$ を変えたときのそれぞれの初期値 $v_e(0) = 0.63653, 0.45010, 0.14233$ から $v_e(t)$ は出発する。

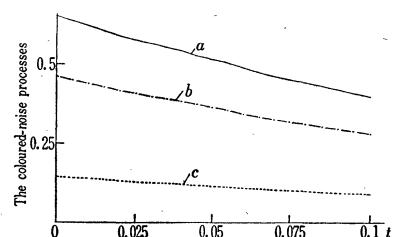


Fig. 2 The coloured-noise processes which is a first-order stationary Butterworth processes.
a...Coloured-noise process for $p_1=0.2$ and $k_1=5.0$. b...Coloured-noise process for $p_1=0.1$ and $k_1=5.0$. c...Coloured-noise process for $p_1=0.01$ and $k_1=5.0$

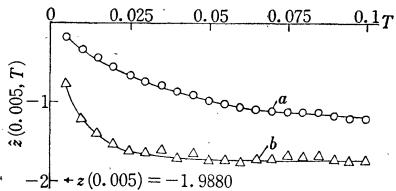


Fig. 3 $\hat{z}(0.005, T)$ versus T . a... $\hat{z}(0.005, T)$ for $p1=0.01$ and $kl=5.0$ when the white noise is $N(0, 0.7^2)$. b... $\hat{z}(0.005, T)$ for $p1=0.01$ and $kl=5.0$ when the white noise is $N(0, 0.3^2)$

このように $p1$ の値を変えた理由は Fig. 2 に示される定常有色雑音過程に対して、本論文の fixed-point スムーザが有効な有色雑音特性を有するか確認するためである。Fig. 2 では、初期値の大きさが $v_e(t)$ にかなり影響しているが、モデルシミュレーションの立場から 3 通りの大きさの定常有色雑音を発生させている。

有色雑音の共分散関数は、(44)式で定義される。

$$K_e(t, \tau) = \begin{cases} p1 e^{-k1(t-\tau)}, & 0 \leq \tau \leq t \\ p1 e^{k1(t-\tau)}, & 0 \leq t \leq \tau \end{cases} \quad (44)$$

(40)式、(44)式の semi-degenerate 核表現された定常確率信号過程と定常有色雑音過程の共分散関数、(1)式の観測値、(2)式の定常白色雑音の分散に関する情報を定理 1 の fixed-point スムーザの初期値システムに代入すると、fixed-point スムージング推定値は、シーケンシャルに求められる。

Fig. 3 では、定常有色観測雑音を一定 ($kl=5.0$, $p1=0.01$) として、定常白色観測雑音の分散を 0.3^2 , 0.7^2 と変化させたときの時刻 T に対する fixed-point スムージング推定値 $\hat{z}(0.005, T)$ が図示されている。

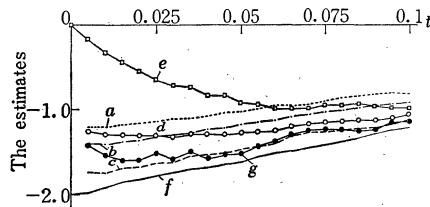


Fig. 4 The fixed-point smoothing and filtering estimates. a... $\hat{z}(t, t+0.2)$ for $p1=0.2$ and $kl=5.0$ when the white noise is $N(0, 0.3^2)$. b... $\hat{z}(t, t+0.2)$ for $p1=0.1$ and $kl=5.0$ when the white noise is $N(0, 0.3^2)$. c... $\hat{z}(t, t+0.2)$ for $p1=0.01$ and $kl=5.0$ when the white noise is $N(0, 0.3^2)$. d... $\hat{z}(t, t+0.2)$ for $p1=0.01$ and $kl=5.0$ when the white noise is $N(0, 0.7^2)$. e... $\hat{z}(t, t)$ for $p1=0.01$ and $kl=5.0$ when the white noise is $N(0, 0.7^2)$. f...First-order stationary Butterworth process for $p1=10.0$ and $kl=5.0$. g... $\hat{z}(t, t+0.05)$ for $p1=0.01$ and $kl=5.0$ when the white noise is $N(0, 0.3^2)$

Fig. 3 より、定常白色雑音の分散が小さいほど、スマージング推定値 $\hat{z}(0, 0.05, T)$ は、信号の真値 $z(0, 0.05) = -1.9880$ を精度良く推定していることがわかる。また、 $t=0.005$ のときのフィルタ推定値 $\hat{z}(0, 0.05)$ に比較して、 $T=0.005$ 時刻以降の観測値、および信号と雑音の自己共分散情報も使用したスマージング推定値 $\hat{z}(0, 0.05, T)$ のほうが、推定精度が向上されるという良好なスマージング効果が Fig. 3 より得られている。Fig. 4 は、定常有色+定常白色観測雑音のときの fixed-point スムーザの白色雑音特性、有色雑音特性、およびスマージング推定値における T の影響（フィルタ推定値との比較）について示した図である。グラフ f は、信号過程を表わし、 $k=5.0$, $p=10.0$ のときの定常 1 次の Butterworth 過程を示している。まず、白色雑音特性に関して、定常有色雑音のパラメータを一定値 ($p1=0.01$, $kl=5.0$) として、 $N(0, 0.3^2)$ と $N(0, 0.7^2)$ のように定常白色雑音を変えた結果、 $N(0, 0.3^2)$ における fixed-point スムージング推定値 $\hat{z}(t, t+0.2)$ のほうがより推定精度が高いという妥当な数値計算結果が得られた。ここに、 $\hat{z}(t, t+0.2)$ は t を fixed-point として、0.2 時刻だけスマージングを行ったときの推定値を示し、各時刻 t について計算した fixed-point スムージング推定値である。つぎに、定常有色雑音の fixed-point スムージング推定値に対する影響は、 a , b のグラフを使用して説明される。 a , b において、定常白色雑音の分散を 0.3^2 の一定値定常有色雑音のパラメータを $kl=5.0$ として $p1=0.2$ (a), $p1=0.1$ (b) と設定した場合に、 a よりも b のグラフにおける fixed-point スムージング推定値 $\hat{z}(t, t+0.2)$ がより精度良く推定を行っているという結論を得た。 T の fixed-point スムージング推定値へ及ぼす効果は、 c , g のグラフにより理解される。 c , g のグラフは、それぞれ定常白色雑音を $N(0, 0.03^2)$ 、定常有色雑音のパラメータを $p1=0.01$, $kl=5.0$ の一定値としたときの $\hat{z}(t, t+0.2)$ (c) と $\hat{z}(t, t+0.05)$ (g) を図示している。 $\hat{z}(t, t+0.2)$ と $\hat{z}(t, t+0.05)$ の $0.005 \leq t \leq 0.1$ における推定誤差分散の和は、それぞれ 0.9466 と 0.41583 である。また、定常白色雑音を $N(0, 0.7^2)$ とおき、定常有色雑音のパラメータを $p1=0.01$, $kl=5.0$ の一定値としたときの fixed-point スムージング推定値 $\hat{z}(t, t+0.2)$ とフィルタ推定値 $\hat{z}(t, t)$ が、 d , e のグラフにより図示されており、 $\hat{z}(t, t+0.2)$ が $\hat{z}(t, t)$ よりも明らかに真値を良く推定している。

以上の計算機シミュレーション結果より、定常有色+定常白色観測雑音のときの fixed-point スムーザアルゴリズム（定理 1）は有効な白色雑音、有色雑音、ス

ムージング特性 (T の $\hat{z}(t, T)$ への影響) を有することとが認められた。

4.2 定常白色観測雑音

本節では、定理 2 で得られた定常白色観測雑音の場合における fixed-point スムーザアルゴリズムの白色雑音特性とスムージング特性 (フィルタ推定値との比較) を調べて、それらの有効な働きを示すとともに、本稿と文献 6 で報告された fixed-point スムーザによるスムージング推定値の推定結果を上記の特性について比較、検討する。

観測方程式は、(18)式の定常白色観測雑音付加の場合を考える。定常白色観測雑音の自己共分散関数は、(2)式の semi-degenerate 核で与えられ、定常確率信号の自己共分散関数は、(4)式の semi-degenerate 核により表わされる。信号過程を(71)式～(73)式で与えられる定常 1 次の Butterworth 過程とし、Fig. 5 のグラフ f で示される。この際、信号の自己共分散関数は、(74)式となり、(74)式の semi-degenerate 核表示された共分散情報と観測値の情報を定理 2 で得られたスムーザアルゴリズムに代入して、fixed-point スムージング推定値は計算される。Fig. 5 の d, e のグラフは定理 2 で $k=5.0, p=10.0$ の一定値とおき、fixed-point スムージング推定値 $\hat{z}(t, t+0.2)$ を、それぞれ白色観測雑音が $N(0, 0.7^2)$ と $N(0, 0.3^2)$ の場合に計算した結果を示す。 d, e のグラフから $N(0, 0.7^2)$ より $N(0, 0.3^2)$ の $\hat{z}(t, t+0.2)$ が真値を良く推定しており、本手法による定常白色観測雑音付加の fixed-point スムーザは、妥当な白色雑音特性を有することが判明した。また、スムージング特性に関しては、 b, d のグラフより、本論文のスムーザは良好なスムージング特性をもつことが考えられる。すなわち、白色雑音を N

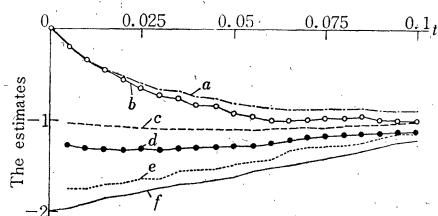


Fig. 5 The prediction and filtering estimates. $a \dots \hat{z}(t, t)$ for $N(0, 0.7^2)$ by the Wiener-Hopf approach. $b \dots \hat{z}(t, t)$ for $N(0, 0.7^2)$ by the innovations approach. $c \dots \hat{z}(t, t+0.2)$ for $N(0, 0.7^2)$ by the Winter-Hopf approach. $d \dots \hat{z}(t, t+0.2)$ for $N(0, 0.7^2)$ by the innovations approach. $e \dots \hat{z}(t, t+0.2)$ for $N(0, 0.3^2)$ by the innovations approach. $f \dots$ First-order stationary Butterworth process for $k=5.0$ and $p=10.0$.

$(0, 0.1^2)$ の一定として、 $\hat{z}(t, t)$, $\hat{z}(t, t+0.2)$ を計算した結果、 $\hat{z}(t, t+0.2)$ がより推定精度が良いということは明らかである。ゆえに、定常白色観測雑音付加のときの fixed-point スムーザ(定理 2)は、有効なスムージング特性を有することが認められた。

さらに、文献 6 で提案されている非定常システムに適用可能な Wiener-Hopf 積分方程式アプローチによる fixed-point スムーザ(定常白色観測雑音)と、本稿のスムーザ(定常白色観測雑音)を使用して、数値的に fixed-point スムージング推定値を計算して、双方の精度的比較を行ってみよう。Fig. 5 で、 a, b のグラフは、 $N(0, 0.7^2)$ のときの Wiener-Hopf 積分方程式アプローチと本稿のイノベーションアプローチによるフィルタ推定値を示し、 b の推定値が真値(信号)を精度良く推定している。 c, d のグラフは、 $N(0, 0.7^2)$ に対して fixed-point スムージング推定値 $\hat{z}(t, t+0.2)$ を Wiener-Hopf 積分方程式アプローチと、本稿のアプローチにより計算した結果を図示する。これらの数値シミュレーション結果より、本論文のイノベーションアプローチによる fixed-point スムーザは、Wiener Hopf 積分方程式アプローチによる fixed-point スムーザに比較して、より早い時刻における推定値の真値への収束性を示すことが確認された。参考のため、微分方程式のきざみ幅が 0.001 のときの $0 \leq t \leq 0.1$ におけるグラフ a, b, c, d の推定誤差分散の和は、それぞれ、18.23, 16.259, 6.3524, 2.8925, 0.38833 であった。

5. おわりに

本稿で導出された fixed-point スムーザの正当性は、計算機シミュレーションの結果示された。本論文では、イノベーション理論に基づく新しい線形連続な fixed-point スムーザ(定常白色観測雑音、定常白色+定常有色観測雑音)の設計を行った。

本論文は、理論的、工学的侧面から新しい fixed-point スムーザの初期値システムを導出し、本稿の推定器の応用分野は、たとえば脳波の誘発電位の推定¹¹⁾のような M.E. 関係や雑音の付加するアナログ無線・有線通信信号推定問題を扱う通信システムなどが考えられる。特に、共分散情報を使用した、Wiener-Hopf 積分方程式アプローチによる fixed-point スムーザ(定常白色観測雑音)に比較すると、本論文の推定器は、計算時間の短縮化および、整定時間の短縮化の点において優れた特性をもつて、より実用的であるという大きな利点を有する。

末筆ながら、日頃、種々有益なご助言、ご指導を賜

わります 京都大学工学部数理工学科 得丸英勝先生に
深謝の意を表します。

参考文献

- 1) N. Halyo and G. A. McAlpine: On the Spectral Factorization of Nonstationary Vector Random Processes, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-19-6**, 674/679 (1974)
- 2) A. P. Sage and J. L. Melsa: Estimation Theory with Applications to Communication and Control, McGraw-Hill (1971)
- 3) L. A. Zadeh and J. R. Ragazzini: An Extension of Wiener's Theory of Prediction, J. Appl. Phys., **21**, 645/655 (1950)
- 4) 中森・杉坂：共分散情報による線形フィルタの設計，システムと制御，**22-2** (1978)
- 5) 中森・杉坂：共分散情報による線形 Predictor の設計，システムと制御，**22-12** (1978)
- 6) S. Nakamori and M. Sugisaka: Initial-Value System for Linear Smoothing Problems by Covariance Information, Automatica, **13-6**, 623/627 (1977)
- 7) 中森・杉坂：共分散情報による線形 Fixed-Lag スムーザの設計，計測自動制御学会論文集，**14-4**, 405/412 (1978)
- 8) T. Kailath: An Innovations Approach to Least-Squares Estimation, Part 1: Linear Filtering in Additive White Noise, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-13-6**, 645/655 (1968)
- 9) T. Kailath and R. Gessey: An Innovations Approach to Least-Squares Estimation-Part V: Innovations Representation and Recursive Estimation in Colored noise, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-18-5**, 433/453 (1973)
- 10) H. Kagiwada and R. Kalaba: An Initial Value Theory for Fredholm Integral Equation with Semi-Degenerate Kernels, J. Assoc. for Computing Machinery, **1-3**, 412/419 (1970)
- 11) 野川・片山・田畠・大塩・川原：大脳電位のインパルス応答，システムと制御，**21-4**, 1/7 (1977)

付録

(12)式の証明を行う前に補題 1 を述べる。

【補題 1】

統計量 $E[\hat{z}(t, t)\nu^T(s)]$, $0 \leq s < t$ はゼロである。

(証明)

一般的に，(8)式の確率過程 $\nu(s)$, $0 \leq s \leq t$, の線形変換によりフィルタ推定値 $\hat{z}(t, t)$ が知られるることは， y に線形演算を施すことにより $\nu(\cdot)$ が得られるので，容易に理解される。すなわち， $\hat{z}(t, t)$ は，

$$\hat{z}(t, t) = \int_0^t h(t, s) \nu(s) ds \quad (45)$$

と表わされ，最適なフィルタ推定値は，つぎの直交射

影の原理

$$z(t) - \hat{z}(t, t) \perp \nu(s), \quad 0 \leq s < t \quad (46)$$

を満足する。フィルタ推定誤差

$$\hat{z}(t, t) = z(t) - \hat{z}(t, t) \quad (47)$$

を導入すると，(46)式より

$$E[\hat{z}(t, t)\nu^T(s)] = 0, \quad 0 \leq s < t \quad (48)$$

が得られる。

(12)式の証明)

まず， $0 \leq s < \tau$ の場合を考えよう。 $\nu(\tau)$ は，(1)，(8), (47)式より

$$\nu(\tau) = \hat{z}(\tau, \tau) + \nu(\tau) + \nu_e(\tau) \quad (49)$$

となる。よって

$$\begin{aligned} E[\nu(\tau)\nu^T(s)] &= E[(\hat{z}(\tau, \tau) + \nu(\tau) + \nu_e(\tau))\nu^T(s)] \\ &= E[\hat{z}(\tau, \tau)\nu^T(s)] + E[\nu(\tau)\nu^T(s)] \\ &\quad + E[\nu_e(\tau)\nu^T(s)] \\ &= E[\nu(\tau)\nu^T(s)] + E[\nu_e(\tau)\nu^T(s)] \end{aligned}$$

が得られる。ここに，補題 1 の結果を使用した。上式は，

$$\begin{aligned} E[\nu(\tau)\nu^T(s)] &= E[\nu(\tau)\hat{z}^T(s, s)] + E[\nu(\tau)\nu^T(s)] \\ &\quad + E[\nu(\tau)\nu_e^T(s)] + E[\nu_e(\tau)\hat{z}^T(s, s)] \\ &\quad + E[\nu_e(\tau)\nu^T(s)] + E[\nu_e(\tau)\nu_e^T(s)], \\ &\quad 0 \leq s < \tau \end{aligned} \quad (50)$$

と変形され，(50)式の右辺第3, 4項は，(3)式よりゼロとなる。第1項は， $\nu(\tau)$ が定常白色雑音であり， $E[\nu(\tau)\hat{z}^T(s, s)] = 0$ と(3), (81)式より

$$\begin{aligned} E[\nu(\tau)\hat{z}^T(s, s)] &= E[\nu(\tau)(z(s) - \hat{z}(s, s))^T] \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $E[\nu(\tau)\hat{z}^T(s, s)] = 0$ となるのは， $\hat{z}(s, s)$ は， τ 時刻に達する前までの $z(\cdot)$, $\nu(\cdot)$, $\nu_e(\cdot)$ のデータを用いるので，(3)式から容易に求められる。第4項は，(3), (8)式より

$$E[\nu(\tau)\hat{z}^T(s, s)] = -E[\nu_e(\tau)\hat{z}^T(s, s)]$$

となる。(2), (4), (5)式とこれらの結果から，(50)式は，

$$\begin{aligned} E[\nu(\tau)\nu^T(s)] &= R\delta(\tau-s) + K_e(\tau, s) - E[\nu_e(\tau)\hat{z}^T(s, s)], \\ &\quad 0 \leq s < \tau \end{aligned}$$

と変形される。同様な議論は， $0 \leq \tau < s$ の場合にも成り立つ。

(Q. E. D.)